Pentatic Mathematics Competition VI

Wildan Bagus Wicaksono

14 – 16 Agustus 2020

I

Soal

PETUNJUK

1. Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal.
2. Disarankan untuk mengerjakannya menggunakan laptop. Jika menggunakan HP, disarankan untuk menggunakannya dengan posisi *landscape*.
3. Lama pengerjaan soal adalah 3 hari, dari tanggal 14 Agustus 2020 sampai 16 Agustus 2020 pada jam 23 : 59.
4. Dilarang menggunakan alat bantu hitung seperti, kalkulator, busur, maupun alat bantu hitung lainnya.
5. Terdiri dari 3 bagian: kemampuan dasar, kemampuan lanjut, dan uraian.
6. Untuk kemampuan dasar:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 2 (dua) poin,
   (c). Untuk soal yang dijawab **salah**, mendapat -1 (minus satu) poin,
   (d). Untuk soal yang **tidak dijawab** atau **kosong**, mendapat 0 (nol) poin.
7. Untuk kemampuan lanjut:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 4 (empat) poin,
   (c). Untuk soal yang dijawab **salah** atau **kosong (tidak dijawab)**, mendapat 0 (nol) poin,
8. Untuk uraian:
   (a). Tuliskan jawaban beserta penjelasan yang jelas dan runtut,
   (b). Jawaban dapat difoto (asal jelas), di-scan, atau diketik. Jika difoto, disarankan untuk memfoto menggunakan aplikasi **Cam Scanner** dalam mode scan dan menjadikan satu dalam bentuk .pdf.
   (c). Setiap soal bernilai $0 - 10$ poin, tidak ada pengurangan untuk jawaban yang salah atau tidak dijawab.
9. Selamat mengerjakan!

1 Kemampuan Dasar

1. Tentukan nilai dari
$$2^{2^0} + 2^{2^1} + 2^{2^2}$$
Catatan: a^{b^c} menyatakan nilai dari $a^{(b^c)}$. Sebagai contoh, $3^{3^2} = 3^9$.

2. Terdapat 4 kotak berukuran besar. Setiap kotak berukuran besar berisi 5 kotak berukuran sedang. Setiap kotak berukuran sedang berisi 6 kotak berukuran kecil. Tentukan banyak kotak berukuran kecil seluruhnya.

3. Titik T terletak pada sisi BC dari persegi $ABCD$. Jika luas dari $\triangle ATD$ adalah 3200 satuan luas, tentukan keliling persegi $ABCD$.

4. Grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + bx + c$ memotong sumbu-x di titik $(n, 0)$ dan $(-n, 0)$ dimana $n > 0$. Jika grafik tersebut memotong sumbu-y di titik $(0, -16)$, tentukan nilai $n - c$.

5. Diberikan fungsi $f(x)$ dimana
$$f(x) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + x$$
untuk setiap bilangan asli x. Tentukan nilai dari $f(2020) - f(2019) + f(10)$.

6. Anto menuliskan menuliskan semua kata dengan menggunakan huruf P, E, N, T, A. Sebagai contoh, PEN dan TAP adalah beberapa kata yang Anto tuliskan. Tentukan banyak semua kata yang Anto tulis.

7. Misalkan O merupakan pusat sebuah lingkaran Γ yang berjari-jari 5 satuan. Titik A, B, C, D (dengan urutan tersebut dan searah putaran jarum jam) terletak pada busur lingkaran Γ. Diketahui bahwa besar
$$\angle AOB + \angle ADB + \angle ACB = 240^\circ$$
Misalkan X adalah luas dari $\triangle AOB$ dalam satuan luas. Tentukan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari X.

8. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (x, y, z) sehingga $(2x + y)^{x+z} = 81$.

9. Rata-rata dari a, b, dan c adalah 16 serta rata-rata dari b, c, dan d adalah 17. Jika rata-rata dari b dan c adalah 17, tentukan nilai a.

10. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = 225$.

2 Kemampuan Lanjut

1. Diberikan $U_1, U_2, U_3, \cdots$ merupakan barisan aritmetika dengan setiap sukunya merupakan bilangan bulat dan $0 < U_1 < U_2 < U_3 < \cdots$. Jika U_1 dan U_{24} merupakan dua bilangan kuadrat berurutan, tentukan nilai terkecil dari U_5.

   Catatan: Bilangan asli n dikatakan **bilangan kuadrat** jika $\sqrt{n}$ bilangan bulat.

2. Diberikan a, b, c, d merupakan bilangan cacah dan kelipatan 5 sehingga $a+b+c+d = 100$. Tentukan banyak pasangan (a, b, c, d).

3. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang sisi $AB = 14, BC = 15$, dan $AC = 13$. Titik D terletak pada sisi AB sehingga besar $\angle ADC = 90°$. Misalkan M merupakan titik tengah AC dan N merupakan titik tengah BC. Tentukan jumlah panjang dari $ND + MD$.

4. Misalkan
$$S = 11 \times 22 \times 33 \times \cdots \times 1100$$
   merupakan perkalian 100 bilangan asli pertama yang habis dibagi 11. Tentukan bilangan bulat terbesar k sehingga S habis dibagi 11^k.

5. Untuk a dan b bilangan prima, pasangan (a, b) disebut *spesial prime* jika selisih dari a dan b merupakan bilangan prima. Tentukan banyak pasangan (a, b) yang spesial prime jika a dan b keduanya kurang dari 100.

6. Tentukan banyak bilangan asli tujuh angka yang dapat dibentuk dengan menggunakan angka 4, 5, dan 6 sehingga setiap dua digit yang bersebelahan selisihnya 1.

7. Misalkan k merupakan bilangan real terbesar sehingga untuk setiap bilangan real x berlaku
$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) \geq k$$
   dan N merupakan bilangan real terbesar x sehingga
$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = k$$
   Jika nilai dari $N - k$ dapat dinyatakan dalam $a + \sqrt{b}$ dengan a dan b bilangan asli, tentukan $a - b$.

8. Lingkaran ω terletak di dalam persegi $ABCD$ dan menyinggung keempat sisi dari persegi $ABCD$. Misalkan AC memotong lingkaran ω di titik X (dengan titik X terletak lebih dekat dengan titik A daripada titik C). Titik K terletak pada sisi CD sehingga XK sejajar dengan AD. Misalkan O merupakan pusat lingkaran ω. Jika perbandingan luas $\triangle XOK$ terhadap persegi $ABCD$ dapat dinyatakan dalam $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ dengan a, b, dan c bilangan asli, tentukan nilai terkecil dari $a + b + c$.

9. Misalkan bentuk ekspansi dari
$$(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2020)$$
   dapat dinyatakan dalam bentuk
$$x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + a_{2018}a^{2018} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

dengan a_0 menyatakan konstanta dan $a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$ menyatakan koefisien. Tentukan sisa pembagian

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2019})^{2020}$$

dengan 100.

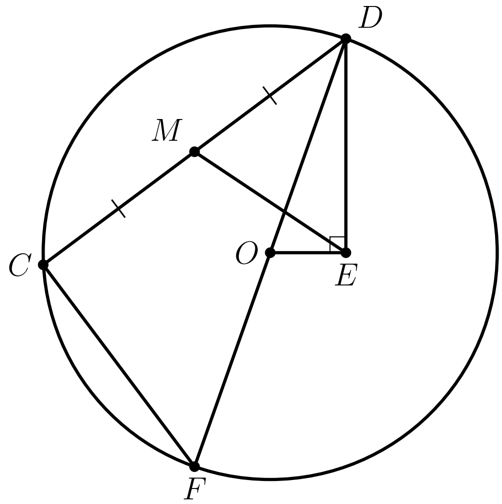
10. Penta menyukai suatu bilangan asli N, jika terdapat bilangan real x yang memenuhi

$$N = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{5}{2} \right\rfloor + \lfloor 2x \rfloor$$

dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2 \rfloor = 2$; $\lfloor 5,5 \rfloor = 5$; dan $\lfloor -2,1 \rfloor = -3$. Tentukan jumlah bilangan asli $N \leq 2020$ yang Penta sukai.

3 Uraian

1. Diberikan lingkaran ω yang berpusat di titik O. Titik B, C, dan D terletak pada busur lingkaran ω. Titik E terletak di dalam lingkaran ω sehingga OE tegak lurus DE. Misalkan M titik tengah dari CD. Perpanjangan DO memotong lingkaran ω sekali lagi di titik F. Buktikan bahwa $\angle OEM + \angle OFC = 90°$.



2. Alnilam, Sugiyem, dan Pico sedang bermain dengan menggunakan dua dadu yang berbeda (seperti dadu biasanya dengan enam sisi). Pada masing-masing dadu, pada sisinya bertuliskan angka 1 sampai 6. Mereka akan bertanding satu sama lain (satu lawan satu). Lalu, dibuat peraturan permainan sebagai berikut.

   (a). Masing-masing babak permainan dilakukan dengan melempar kedua dadu bersama-sama sebanyak satu kali.

   (b). Alnilam dikatakan menang jika jumlah bilangan yang muncul pada sisi atas dadu habis dibagi 4.

   (c). Sugiyem dikatakan menang jika jumlah bilangan yang muncul pada sisi atas dadu habis dibagi 3.

   (d). Pico dikatakan menang jika jumlah bilangan yang muncul pada sisi atas dadu habis dibagi 5.

   (e). Keduanya dikatakan seri jika kedua pemain memenangkan permainan seperti pada syarat (b), (c), atau (d). Sebagai contoh, jika Alnilam dengan Sugiyem bermain dan jumlah mata dadu yang muncul adalah 12, maka Alnilam dan Sugiyem seri.

   (f). Jika pemain B kalah ketika melawan pemain A, maka pemain B digantikan oleh pemain C dan pemain A melawan pemain C pada babak selanjutnya. Jika pemain A dan pemain B seri, maka pemain A dan pemain B akan bertanding lagi pada babak selanjutnya.

   Babak pertama, Alnilam bermain melawan Sugiyem. Tentukan peluang bahwa pada babak ketiga Alnilam kalah melawan Sugiyem jika pada babak-babak sebelumnya Alnilam tidak pernah kalah.

3. Diberikan p, q, dan r adalah tiga bilangan prima yang berbeda dan $n = p \times q \times r$. Wildan menuliskan semua pecahan $\frac{a}{b}$ pada papan tulis dimana $a \times b = n^n$ dan $FPB(a, b) = 1$. Misalkan S merupakan jumlah semua pecahan $\frac{a}{b}$ pada papan tulis. Buktikan bahwa
$$S = \left(p^n + \frac{1}{p^n}\right)\left(q^n + \frac{1}{q^n}\right)\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)$$

4. Diberikan x, y, z dimana masing-masing dari
$$x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2, \quad x^3 + y^3 + z^3$$
bilangan bulat. Jika
$$x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$
Buktikan bahwa $x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$ bilangan bulat.

II

Soal dan Solusi

1 Kemampuan Dasar

1. Tentukan nilai dari
$$2^{2^0} + 2^{2^1} + 2^{2^2}$$
Catatan: a^{b^c} menyatakan nilai dari $a^{(b^c)}$. Sebagai contoh, $3^{3^2} = 3^9$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{22}}$

$$2^{2^0} + 2^{2^1} + 2^{2^2} = 2^1 + 2^2 + 2^4 = 2 + 4 + 16 = \boxed{22}$$

> **Komentar.** Sebanyak 78.31% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka soal ini dikategorikan **sangat mudah**. Perlu diingat bahwa $a^0 = 1$ untuk $a \neq 0$.

2. Terdapat 4 kotak berukuran besar. Setiap kotak berukuran besar berisi 5 kotak berukuran sedang. Setiap kotak berukuran sedang berisi 6 kotak berukuran kecil. Tentukan banyak kotak berukuran kecil seluruhnya.

Jawab: $\boxed{\mathbf{120}}$

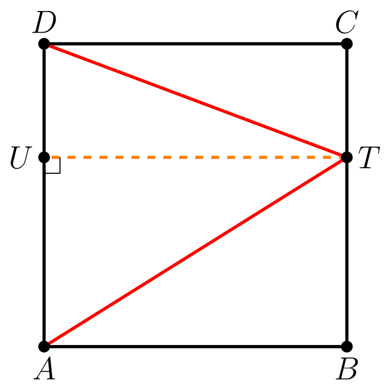
Banyak kotak berukuran sedang pada 1 kotak berukurang besar adalah 5 kotak. Maka banyak kotak berukuran sedang pada 4 kotak berukuran besar adalah $4 \times 5 = 20$ kotak. Banyak kotak berukuran kecil pada 1 kotak berukuran sedang adalah 6. Maka banyak kotak berukuran kecil pada 20 kotak berukuran sedang adalah $20 \times 6 = 120$ kotak. Jadi, banyak kotak berukuran kecil seluruhnya adalah $\boxed{120}$.

> **Komentar.** Sebanyak 93.97% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka soal ini dikategorikan **sangat mudah**. Soal ini merupakan soal termudah pada bagian kemampuan dasar.

3. Titik T terletak pada sisi BC dari persegi $ABCD$. Jika luas dari $\triangle ATD$ adalah 3200 satuan luas, tentukan keliling persegi $ABCD$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{320}}$

Tarik garis tinggi dari T ke sisi AD yang memotong sisi AD di titik U.



Misalkan panjang sisi persegi adalah x. Maka luas $\triangle ATD$,

$$\begin{aligned} L_{\triangle ATD} &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot TU \\ 3200 &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \\ 6400 &= x^2 \\ 80 &= x \end{aligned}$$

Sehingga keliling persegi adalah $4x = 4 \cdot 80 = \boxed{320}$ satuan.

> **Komentar.** Sebanyak 74.69% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat mudah**.

4. Grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + bx + c$ memotong sumbu-x di titik $(n, 0)$ dan $(-n, 0)$ dimana $n > 0$. Jika grafik tersebut memotong sumbu-y di titik $(0, -16)$, tentukan nilai $n - c$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{20}}$

   Untuk $(n, 0)$, maka $0 = n^2 + nb + c$ dan untuk $(-n, 0)$ maka $0 = n^2 - nb + c$. Dengan menjumlahkan keduanya, didapat bahwa

   $$0 = n^2 + nb + c + n^2 - nb + c = 2n^2 + 2c \Longleftrightarrow c = -n^2$$

   Subtitusikan, kita peroleh

   $$0 = n^2 + nb + c = n^2 + nb - n^2 = nb \Longleftrightarrow b = 0$$

   Demikian $y = x^2 - n^2$. Karena melalui titik $(0, -16)$, maka

   $$-16 = 0 - n^2 = -n^2 \Longleftrightarrow n^2 = 16 \Longleftrightarrow n = 4$$

   Sehingga $c = -n^2 = -16$. Maka $n - c = 4 - (-16) = \boxed{20}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 39.75% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-sulit**. Materi ini merupakan materi fungsi kuadrat yang dipelajari di kelas VIII.

5. Diberikan fungsi $f(x)$ dimana

   $$f(x) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + x$$

   untuk setiap bilangan asli x. Tentukan nilai dari $f(2020) - f(2019) + f(10)$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{2075}}$

   Tinjau bahwa

   $$f(2020) = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2019) + 2020 = f(2019) + 2020$$

   yang menyimpulkan $f(2020) - f(2019) = 2020$. Sedangkan,

   $$f(10) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

   Maka $f(2020) - f(2019) + f(10) = 2020 + 55 = \boxed{2075}$.

> **Komentar.** Sebanyak 68.67% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah-sedang**. Kita dapat menghitung deret tersebut menggunakan
> $$f(x) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}$$
> Tapi, akan lebih mudah jika
> $$\begin{array}{rl} f(2020) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2018 + 2019 + 2020 & \\ f(2019) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2018 + 2019 & \\ \hline f(2020) - f(2019) = 2020 & - \end{array}$$
> Sehingga cukup menghitung $f(10)$ dengan formula $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$.

6. Anto menuliskan menuliskan semua kata dengan menggunakan huruf P, E, N, T, A. Sebagai contoh, PEN dan TAP adalah beberapa kata yang Anto tuliskan. Tentukan banyak kata yang Anto tulis.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{3905}}$ **atau** $\boxed{\mathbf{325}}$

   Soal ini cukup ambigu. Sehingga ada dua pemahaman.

   Pemahaman 1. Tidak boleh berulang

   Karena huruf dalam kata tersebut memperhatikan urutan (sebagai contoh, PE dan EP dianggap berbeda), maka masalah ini merupakan permutasi. Ada 5 huruf dari P, E, N, T, A.

   Jika 1 huruf, maka ada $P_1^5 = \dfrac{5!}{(5-1)!} = \dfrac{5!}{4!} = 5$.

   Jika 2 huruf, maka ada $P_2^5 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = 20$.

   Jika 3 huruf, maka ada $P_3^5 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 60$.

   Jika 4 huruf, maka ada $P_4^5 = \dfrac{5!}{(5-4)!} = \dfrac{5!}{1!} = 120$.

   Jika 5 huruf, maka ada $P_5^5 = \dfrac{5!}{(5-5)!} = \dfrac{5!}{0!} = 120$.

   Total, ada
   $$5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$$
   Jadi, banyak kata yang Anto tulis adalah $\boxed{325}$.

   Pemahaman 2. Boleh berulang

   Jika 5 huruf. Misalkan posisi kata tersebut kita tuliskan dengan
   $$\square \quad \star \quad \odot \quad \blacksquare \quad \triangle$$
   Setiap $\square, \star, \odot, \blacksquare, \triangle$ masing-masing memiliki 5 kemungkinan. Maka ada $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125$. kemungkinan.

   Degan cara yang sama, untuk 4 huruf ada $5^4 = 625$ kemungkinan. Untuk 3 huruf ada $5^3 = 125$ kemungkinan. Untuk 2 huruf ada $5^2 = 24$ kemungkinan. Untuk 1 huruf ada $5^1 = 5$ kemungkinan.

Sehingga total ada

$$3125 + 625 + 125 + 25 + 5 = 3905$$

Jadi, banyak kata yang Anto tulis adalah $\boxed{3905}$.

> **Komentar.** Sebanyak 38.55% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Sehingga dapat dikategorikan **sedang-sulit**. Soal ini ambigu sehingga memiliki dua alternatif jawaban.

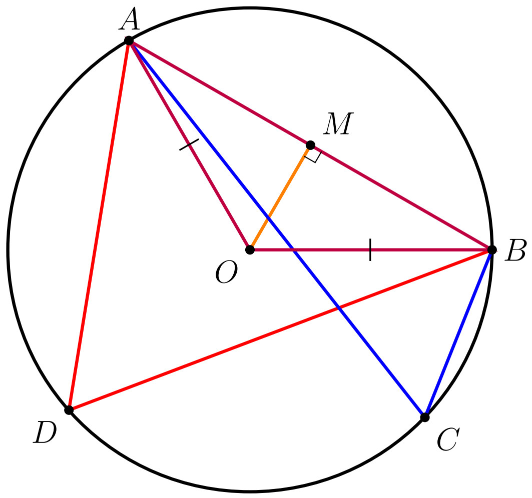
7. Misalkan O merupakan pusat sebuah lingkaran Γ yang berjari-jari 5 satuan. Titik A, B, C, D (dengan urutan tersebut dan searah putaran jarum jam) terletak pada busur lingkaran Γ. Diketahui bahwa besar

$$\angle AOB + \angle ADB + \angle ACB = 240^\circ$$

Misalkan X adalah luas dari $\triangle AOB$ dalam satuan luas. Tentukan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari X.

Jawab: $\boxed{\mathbf{10}}$

Kita tarik garis tinggi dari O ke sisi AB, yaitu OM.



Perhatikan bahwa $\angle ADB, \angle ACB$ merupakan sudut keliling dan $\angle AOB$ merupakan sudut pusat yang menghadap busur yang sama. Akibatnya,

$$\angle ADB = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\angle AOB + \angle ADB + \angle ACB &= 240^\circ \\ \angle AOB + \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle AOB &= 240^\circ \\ 2\angle AOB &= 240^\circ \\ \angle AOB &= 120^\circ\end{aligned}$$

Karena $OM \perp AB$ dan panjang $AO = OB$, akibatnya panjang $AM = MB$ dan $\angle AOM = \angle BOM = 60^\circ$. Kita peroleh juga $\angle OAM = \angle OBM = 30^\circ$. Kita tahu bahwa panjang $AO = OB = 5$. Kita dapatkan panjang $OM = \frac{5}{2}$ dan $AM = MB = \frac{5}{2}\sqrt{3}$. Kita peroleh panjang $AB = 5\sqrt{3}$. Maka luas segitiga $\triangle AOB$ adalah

$$X = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \approx 10,82$$

Jadi, bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari X yaitu $\boxed{10}$.

> **Komentar.** Sebanyak 21.68% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Soal ini merupakan soal paling sulit pada bagian kemampuan dasar. Properti yang digunakan dalam soal ini adalah hubungan sudut puast-sudut keliling dan sifat segitiga istimewa. Selain itu, Anda juga dapat menggunakan aturan sinus.

8. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (x, y, z) sehingga $(2x + y)^{x+z} = 81$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{2}}$

   Tinjau $81 = 81^1 = 9^2 = 3^4$. Karena x, y, z bilangan asli, jelas $x + z \geq 2$.

   - Jika $x+z = 2$ dan $2x+y = 9$, maka kita peroleh $x = z = 1$ sehingga $y = 7$. Demikian $(x, y, z) = (1, 7, 1)$.
   - Jika $x + z = 4$ dan $2x + y = 3$, maka haruslah $x = y = 1$ sehingga $z = 3$. Demikian $(x, y, z) = (1, 1, 3)$.

   Demikian ada sebanyak $\boxed{2}$ pasangan.

> **Komentar.** Sebanyak 49.39% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**.

9. Rata-rata dari a, b, dan c adalah 16 serta rata-rata dari b, c, dan d adalah 17. Jika rata-rata dari b dan c adalah 17, tentukan nilai $a \times d$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{238}}$

   Karena rata-rata dari a, b, dan c adalah 16, maka

   $$16 = \frac{a+b+c}{3} \iff a + b + c = 48$$

   Karena rata-rata dari b, c, dan d adalah 17, maka

   $$17 = \frac{b+c+d}{3} \iff b + c + d = 51$$

   Karena rata-rata dari b dan c adalah 17, maka

   $$17 = \frac{b+c}{2} \iff 34 = b + c$$

   Karena $a+b+c = a+34$, maka $a = 14$. Karena $b+c+d = 34+d$, maka $d = 17$. Sehingga $a \times d = 14 \times 17 = \boxed{238}$.

> **Komentar.** Sebanyak 74.69% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat mudah**.

10. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = 225$.

    Jawab: $\boxed{\mathbf{12}}$

    Perhatikan bahwa $a^2 + b^2 = 225$ atau $a^2 + b^2 = 15^2$. Untuk $a^2 = 15^2$, maka $b^2 = 0$. Untuk $b^2 = 15^2$, maka $a^2 = 0$. Kita peroleh

    $$(a, b) = (15, 0), (-15, 0), (0, 15), (0, -15)$$

    yang berarti ada 4 kemunginan. Andaikan $a, b > 0$. Maka $(a, b, 15)$ haruslah tripel pythagoras. Tripel pythagoras yang memenuhi hanyalah tripel dari $(3, 4, 5) \to (9, 12, 15)$. Tetapi, a dan b dapat bernilai negatif. Maka

    $$(a, b) = (9, 12), (-9, 12), (9, -12), (-9, -12), (12, 9), (-12, 9), (12, -9), (-12, -9)$$

    yang berarti ada 8 kemungkinan. Demikian ada $4 + 8 = \boxed{12}$ pasangan bilangan bulat (a, b).

Komentar. Sebanyak 25.30% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Kesalahan umum yang dilakukan peserta yaitu melupakan pasangan

$$(a, b) = (15, 0), (-15, 0), (0, 15), (0, -15)$$

Sehingga menjawab ada 8 pasangan saja yang memenuhi.

2 Kemampuan Lanjut

1. Diberikan $U_1, U_2, U_3, \cdots$ merupakan barisan aritmetika dengan setiap sukunya merupakan bilangan bulat dan $0 < U_1 < U_2 < U_3 < \cdots$. Jika U_1 dan U_{24} merupakan dua bilangan kuadrat berurutan, tentukan nilai terkecil dari U_5.

   Catatan: Bilangan asli n dikatakan **bilangan kuadrat** jika $\sqrt{n}$ bilangan bulat.

   Jawab: $\boxed{\textbf{125}}$

   Karena $U_1, U_2, U_3, \cdots$ barisan aritmetika, maka $U_n = U_1 + (n-1)b$. Karena U_1 dan U_n masing-masing bilangan bulat, maka haruslah b juga bilangan bulat. Karena $U_1 < U_2 < U_3 < \cdots$, maka $b > 0$. Agar U_5 bernilai sekecil mungkin, maka haruslah $b = 1$. Maka $U_n = U_1 + n - 1$. Maka $U_{24} = U_1 + 23$. Tinjau bahwa U_1 dan U_{24} merupakan bilangan kuadrat berurutan. Misalkan $U_1 = k^2$ dan $U_{24} = (k+1)^2$. Maka kita peroleh

$$\begin{aligned} U_{24} - U_1 &= (k+1)^2 - k^2 \\ U_1 + 23 - U_1 &= k^2 + 2k + 1 - k^2 \\ 23 &= 2k + 1 \\ 22 &= 2k \\ 11 &= k \end{aligned}$$

   Demikian $U_1 = k^2 = 11^2 = 121$. Maka

$$U_5 = U_1 + 4 = 121 + 4 = 125$$

   Jadi, nilai terkecil dari U_5 adalah $\boxed{125}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 45.78% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Soal ini memanfaatkan fakta bahwa
   >
   > $$U_n = U_1 + (n-1)b$$
   >
   > dengan b merupakan beda barisan aritmetika $U_1, U_2, U_3, \cdots$.

2. Diberikan a, b, c, d merupakan bilangan cacah dan kelipatan 5 sehingga $a + b + c + d = 100$. Tentukan banyak pasangan (a, b, c, d).

   Jawab: $\boxed{\textbf{1771}}$

   Misalkan $a = 5w, b = 5x, c = 5y$, dan $d = 5z$ dengan w, x, y, z bilangan cacah. Karena $a + b + c + d = 100$, maka

$$5w + 5x + 5y + 5z = 100 \Longleftrightarrow w + x + y + z = 20$$

   Sehingga banyak pasangan (w, x, y, z) adalah

$$C_{4-1}^{20+4-1} = C_3^{23} = \frac{23!}{3!20!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 11 \cdot 7 = 1771$$

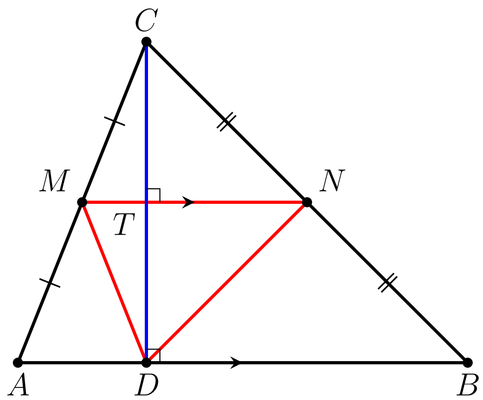
   Karena nilai a, b, c, d bersifat unik terhadap w, x, y, z, maka banyak pasangan (a, b, c, d) sama dengan banyak pasangan (w, x, y, z), yaitu $\boxed{1771}$.

> **Komentar.** Sebanyak 19.27% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Penentuan banyak solusi bilangan cacah dari
>
> $$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = k$$
>
> dengan k bilangan cacah dapat ditentukan dengan
>
> $$C^{k+n-1}n - 1 = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!}$$
>
> Yaitu dengan **Star and Bar Theorem**.

3. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang sisi $AB = 14, BC = 15$, dan $AC = 13$. Titik D terletak pada sisi AB sehingga besar $\angle ADC = 90°$. Misalkan M merupakan titik tengah AC dan N merupakan titik tengah BC. Tentukan jumlah panjang dari $ND + MD$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{14}}$

Misalkan CD memotong MN di titik T.



Perhatikan bahwa M dan N titik tengah AC dan BC berturut-turut. Akibatnya, MN sejajar dengan AB. Demikian $\triangle DBC$ sebangun dengan $\triangle TNC$. Maka

$$\frac{CD}{CT} = \frac{CB}{CN} = 2$$

sehingga $CD = 2CT$. Maka panjang $CT = TD$. Tinjau juga bahwa karena MN sejajar AB, maka $\angle BDC = \angle NTC = 90°$. Sehingga panjang $ND = NC$. Dengan alasan yang sama, kita peroleh panjang $MD = MC$. Maka

$$ND + MD = NC + MC = \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{15}{2} + \frac{13}{2} = \frac{28}{2} = \boxed{14}$$

> **Komentar.** Sebanyak 42.16% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**.

4. Misalkan

$$S = 11 \times 22 \times 33 \times \cdots \times 1100$$

merupakan perkalian 100 bilangan asli pertama yang habis dibagi 11. Tentukan bilangan bulat terbesar k sehingga S habis dibagi 11^k.

Jawab: $\boxed{\mathbf{109}}$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}S &= (11 \times 1) \times (11 \times 2) \times (11 \times 3) \times \cdots \times (11 \times 100) \\ &= 11^{100} \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100 \\ S &= 11^{100} \times 100!\end{aligned}$$

Bilangan bulat terbesar p sehingga $100!$ habis dibagi 11^p adalah

$$p = \left\lfloor \frac{100}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{11^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{11^3} \right\rfloor + \cdots = 9 + 0 + 0 + \cdots = 9$$

Demikian bilangan bulat terbesar k yang memenuhi adalah $k = 100 + p = \boxed{109}$.

Komentar. Sebanyak 44.57% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**. Penentuan bilangan bulat terbesar k sehingga p^k habis membagi $n!$ dapat ditentukan dengan

$$k = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

dengan n bilangan asli dan p bilangan prima.

5. Untuk a dan b bilangan prima, pasangan (a, b) disebut *spesial prime* jika selisih dari a dan b merupakan bilangan prima. Tentukan banyak pasangan (a, b) yang spesial prime jika a dan b keduanya kurang dari 100.

Jawab: $\boxed{\textbf{32}}$

Selisih dari dua bilangan dinyatakan dengan mutlak dari pengurangan dua bilangan tersebut. Misalkan $|a - b| = p$ dimana p bilangan prima. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a \geq b$. Maka $a - b = p$. Jika $p > 2$, maka p ganjil. Maka $a - b$ haruslah juga ganjil. Sehingga salah satu daru a dan b haruslah ganjil (dan bilangan lainnya genap). Maka haruslah $b = 2$. Kita peroleh bahwa

$$a - 2 = p$$

Pasangan bilangan prima yang semacam ini adalah

$$(a, p) = (5, 3), (7, 5), (13, 11), (19, 17), (31, 29), (43, 41), (61, 59), (73, 71)$$

yang berarti ada 8. Jika $p = 2$, maka $a - b = 2$. Dengan cara yang sama, akan diperoleh 8 pasangan juga. Maka untuk $a \geq b$ ada $8 + 8 = 16$ pasangan. Jika $a < b$, maka $b - a = p$. Dengan cara yang sama, akan diperoleh 16 pasangan juga.

Sehingga total pasangan (a, b) adalah $16 + 16 = \boxed{32}$.

Komentar. Sebanyak 12.04% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Ini merupakan soal tersulit pada bagian kemampuan lanjut. Kesalahan umum yang dilakukan peserta adalah menanggap selisih a dan b dinyatakan dengan $a - b$. Sehingga hanya menjawab ada 16 pasangan yang memenuhi.

6. Tentukan banyak bilangan asli tujuh angka yang dapat dibentuk dengan menggunakan angka 4, 5, dan 6 sehingga setiap dua digit yang bersebelahan selisihnya 1.

Jawab: $\boxed{\textbf{24}}$

Misalkan bilangan itu adalah $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$. Jika $a_1 = 4$, maka ada 1 kemungkinan untuk a_2, ada 2 kemungkinan untuk a_3, ada 1 kemungkinan untuk a_4, ada 2 kemungkinan untuk a_5, ada 1 kemungkinan untuk a_6, dan ada 2 kemungkinan untuk a_7. Sehingga banyak bilangan yang terbentuk ada

$$1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

Dengan cara yang sama ketika $a_1 = 6$, ada 8 kemungkinan.

Jika $a_1 = 5$, maka ada 2 kemungkinan untuk a_2, ada 1 kemungkinan untuk a_3, ada 2 kemungkinan untuk a_4, ada 1 kemungkinan untuk a_5, ada 2 kemungkinan untuk a_6, dan ada 1 kemungkinan untuk a_7. Sehingga banyak bilangan yang terbentuk ada

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$$

Maka banyak bilangan yang memenuhi adalah $8 + 8 + 8 = \boxed{24}$.

> **Komentar.** Sebanyak 25.30% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**.

7. Misalkan k merupakan bilangan real terbesar sehingga untuk setiap bilangan real x berlaku

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) \geq k$$

dan N merupakan bilangan real terbesar x sehingga

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = k$$

Jika nilai dari $N - k$ dapat dinyatakan dalam $a + \sqrt{b}$ dengan a dan b bilangan asli, tentukan $a - b$.

Jawab: $\boxed{\textbf{17}}$

Perhatikan bahwa

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = (x+1)(x+7) \cdot (x+3)(x+5) = \left(x^2 + 8x + 7\right)\left(x^2 + 8x + 15\right)$$

Misalkan $x^2 + 8x + 7 = y$. Maka

$$\left(x^2 + 8x + 7\right)\left(x^2 + 8x + 15\right) = y(y+8) = y^2 + 8y$$

Nilai minimum $y^2 + 8y$ adalah

$$\frac{-D}{4a} = \frac{-\left(8^2 - 4(1)(0)\right)}{4(1)} = -\frac{64-0}{4} = -\frac{64}{4} = -16$$

Kita peroleh bahwa

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) \geq -16$$

Demikian $k = -16$. Kondisi $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = -16$ atau $y^2 + 8y = -16$, maka

$$y^2 + 8y + 16 = 0 \Longleftrightarrow (y+4)^2 = 0$$

sehingga $y = -4$. Demikian $x^2 + 8x + 7 = -4$ sehingga $x^2 + 8x + 11 = 0$. Dengan rumus ABC,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(11)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{20}}{2} = -4 \pm \sqrt{5}$$

Demikian $N = -4 + \sqrt{5}$. Maka

$$N - k = -4 + \sqrt{5} - (-16) = -4 + \sqrt{5} + 16 = 12 + \sqrt{5}$$

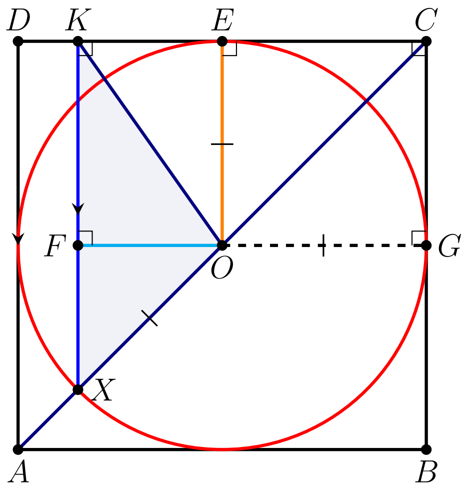
sehingga $a = 12$ dan $b = 5$. Maka $a - b = \boxed{7}$.

> **Komentar.** Sebanyak 15.66% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Soal ini memanfaatkan fungsi kuadrat, yaitu menentukan $(x_{\text{op}}, y_{\text{op}})$ untuk mendapatkan nilai k.

8. Lingkaran ω terletak di dalam persegi $ABCD$ dan menyinggung keempat sisi dari persegi $ABCD$. Misalkan AC memotong lingkaran ω di titik X (dengan titik X terletak lebih dekat dengan titik A daripada titik C). Titik K terletak pada sisi CD sehingga XK sejajar dengan AD. Misalkan O merupakan pusat lingkaran ω. Jika perbandingan luas $\triangle XOK$ terhadap persegi $ABCD$ dapat dinyatakan dalam $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ dengan a, b, dan c bilangan asli, tentukan nilai terkecil dari $a+b+c$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{19}}$

   Misalkan lingkaran ω menyinggung CD di titik E dan menyinggung BC di titik G. Misalkan OF merupakan garis tinggi $\triangle XOK$.



   Misalkan panjang jari-jari lingkaran ω adalah R. Kita tahu bahwa XO, OG, OE merupakan jari-jari lingkarna ω. Maka panjang $XO = OG = OE = R$. Perhatikan bahwa $OGCE$ merupakan persegipanjang. Sehingga panjang $CE = OG = R$ dan $CG = OE = R$. Perhatikan $\triangle OGC$. Dari pythagoras, maka

$$OC = \sqrt{OG^2 + GC^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$

   Perhatikan bahwa panjang sisi dari persegi $ABCD$ sama dengan panjang diameter lingkaran ω. Maka panjang $AB = BC = CD = DA = R$. Dengan cara yang sama, pythagoras pada $\triangle ACD$, maka

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4R^2 + 4R^2} = 2R\sqrt{2}$$

   Kita tahu bahwa panjang $XO = R$. Maka

$$XC = XO + OC = R + R\sqrt{2} = R\left(\sqrt{2}+1\right)$$

   Karena $XK \parallel DA$, maka $\triangle XCK$ dengan $\triangle ACD$ sebangun. Akibatnya,

$$\begin{aligned} \frac{XC}{AC} &= \frac{CK}{CD} \\ \frac{R\left(\sqrt{2}+1\right)}{2R\sqrt{2}} &= \frac{CK}{2R} \\ CK &= \frac{R\left(\sqrt{2}+1\right)}{2R\sqrt{2}} \cdot 2R \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$CK = \frac{2+\sqrt{2}}{2}R$$

Perhatikan bahwa panjang $CK = CE + KE$. Maka panjang $KE = CK - CE$, didapat

$$KE = \frac{2+\sqrt{2}}{2}R - R = \frac{2+\sqrt{2}-2}{2}R = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

Perhatikan $\triangle XCK$. Karena $XK \parallel AD$, maka besar

$$\angle KXC = \angle DAC = 45^\circ$$

Artinya, didapat juga $\angle XCK = 45^\circ$. Demikian $\triangle XCK$ merupakan segitiga siku-siku samakaki. Maka panjang

$$XK = CK = \frac{2+\sqrt{2}}{2}R$$

Perhatikan bahwa $FOEK$ persegipanjang. Maka panjang $FO = KE = \frac{\sqrt{2}}{2}R$. Demikian luas dari $\triangle XOK$, yaitu

$$L_{\triangle XOK} = \frac{1}{2} \cdot FO \cdot XK = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2}R = \frac{2\sqrt{2}+2}{8}R^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{4}R^2$$

Sedangkan, luas dari persegi $ABCD$ adalah $(2R)^2 = 4R^2$. Maka

$$\frac{L_{\triangle XOK}}{L_{ABCD}} = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}R^2}{4R^2} = \frac{1+\sqrt{2}}{16}$$

Karena $a+b+c$ harus terkecil, maka $a = 1, b = 2$, dan $c = 16$. Maka $a+b+c$ terkecil adalah $1+2+16 = \boxed{19}$.

> **Komentar.** Sebanyak 32.53% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-sulit**.

9. Misalkan bentuk ekspansi dari

$$(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2020)$$

dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + a_{2018}a^{2018} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

dengan a_0 menyatakan konstanta dan $a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$ menyatakan koefisien. Tentukan sisa pembagian

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2019})^{2020}$$

dengan 100.

Jawab: $\boxed{\mathbf{1}}$

Kita tahu bahwa

$$(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2020) = x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + a_{2018}a^{2018} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Subtitusi $x = 0$, maka

$$(-1)(-2)(-3)\cdots(-2020) = a_0 \Longrightarrow a_0 = 2020!$$

Subtitusi $x = 1$, maka

$$0 = 1 + a_{2019} + a_{2018} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

sehingga

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2019} = -1 - a_0 = -1 - 2020!$$

Maka

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2019})^{2020} = (-1 - 2020!)^{2020} = (1 + 2020!)^{2020}$$

Karena $2020! \equiv 0 \pmod{100}$, maka

$$(1 + 2020!)^{2020} \equiv (1 + 0)^{2020} \equiv 1 \pmod{100}$$

Jadi, sisa pembagian $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2019})^{2020}$ jika dibagi 100 adalah $\boxed{1}$.

> **Komentar.** Sebanyak 16.86% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Ide penyelesaian pada soal ini adalah mensubtitusikan nilai x tertentu sehingga kita peroleh apa yang diminta pada soal.

10. Penta menyukai suatu bilangan asli N, jika terdapat bilangan real x yang memenuhi

$$N = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{5}{2} \right\rfloor + \lfloor 2x \rfloor$$

dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2 \rfloor = 2$; $\lfloor 5, 5 \rfloor = 5$; dan $\lfloor -2, 1 \rfloor = -3$. Tentukan jumlah bilangan asli $N \leq 2020$ yang Penta sukai.

Jawab: $\boxed{\mathbf{1021110}}$

Misalkan $x = a + \theta$ dimana a bilangan cacah dan $0 \leq \theta < 1$. Maka

$$\begin{aligned} N &= a + \left\lfloor a + 2 + \frac{1}{2} + \theta \right\rfloor + \lfloor 2a + 2\theta \rfloor \\ &= a + (a + 2) + \left\lfloor \theta + \frac{1}{2} \right\rfloor + 2a + \lfloor 2\theta \rfloor \\ N &= 4a + 2 + \left\lfloor \theta + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor 2\theta \rfloor \end{aligned}$$

(a). Jika $\theta < \frac{1}{2}$, maka kita punya

$$N = 4a + 2 + \left\lfloor \theta + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor 2\theta \rfloor = 4a + 2 + 0 + 0 = 4a + 2$$

(b). Jika $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$, maka kita punya

$$N = 4a + 2 + \left\lfloor \theta + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor 2\theta \rfloor = 4a + 2 + 1 + 1 = 4a + 4$$

Demikian bilangan yang Penta sukai adalah $N = 4a + 2$ atau $N = 4a + 4$ untuk setiap bilangan cacah a.

Untuk $N = 4a + 2$. Jika $2020 = 4a + 2$, maka akan didapatkan $a = \frac{2018}{4} = 504\frac{1}{2}$. Demikian bilangan asli N yang disukai Penta adalah $N = 4a + 2$ dengan $0 \leq a \leq 504$. Kita tuliskan bilangan tersebut adalah $2, 6, 10, 14, \cdots, 2018$.

Untuk $N = 4a+4$. Jika $2020 = 4a+4$, maka akan didapatkan $a = 504$. Demikian bilangan asli N tersebut adalah $N = 4a + 4$ dengan $0 \leq a \leq 504$. Kita tuliskan bilangan tersebut adalah $4, 8, 12, \cdots, 2020$.

Demikian semua bilangan yang Penta sukai adalah $2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots, 2018, 2020$. Maka jumlah semua bilangan tersebut adalah

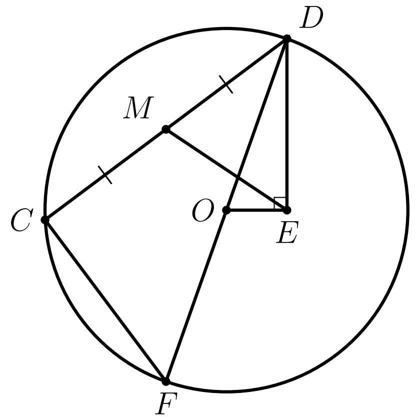
$$\begin{aligned}\sum N &= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 2018 + 2020 \\ &= 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 1009 + 1010) \\ &= 2 \cdot \frac{1010 \cdot 1011}{2} \\ &= 1010 \cdot 1011 \\ \sum N &= 1021110\end{aligned}$$

Jadi, jumlah semua bilangan yang Penta sukai adalah $\boxed{1021110}$.

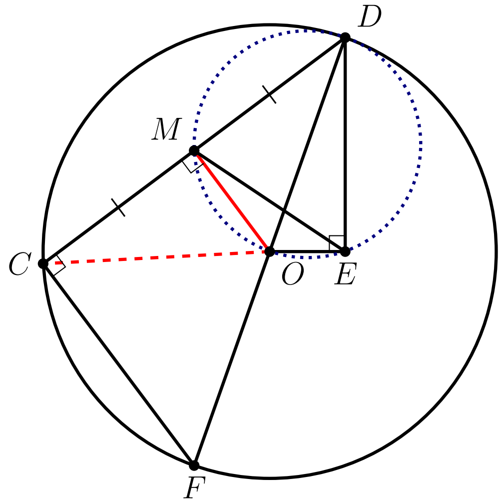
> **Komentar.** Sebanyak 12.04% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Ini merupakan soal tersulit pada bagian kemampuan lanjut. Membagi kasus bentuk desimal (fractional part) dari x dapat membantu semua bentuk dari bilangan asli N.

3 Uraian

1. Diberikan lingkaran ω yang berpusat di titik O. Titik B, C, dan D terletak pada busur lingkaran ω. Titik E terletak di dalam lingkaran ω sehingga OE tegak lurus DE. Misalkan M titik tengah dari CD. Perpanjangan DO memotong lingkaran ω sekali lagi di titik F. Buktikan bahwa $\angle OEM + \angle OFC = 90°$.



Bukti.



Perhatikan bahwa panjang $CO = OD$ dan M titik tengah CD. Akibatnya, $OM \perp CD$. Karena $\angle OED + \angle OMD = 180°$, maka $OEDM$ segiempat talibusur. Akibatnya, $\angle ODM = \angle OEM$. Tinjau juga bahwa DF merupakan diameter ω. Dari hubungan sudut pusat-sudut keliling, maka

$$\angle DCF = \frac{1}{2}\angle DOF = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$$

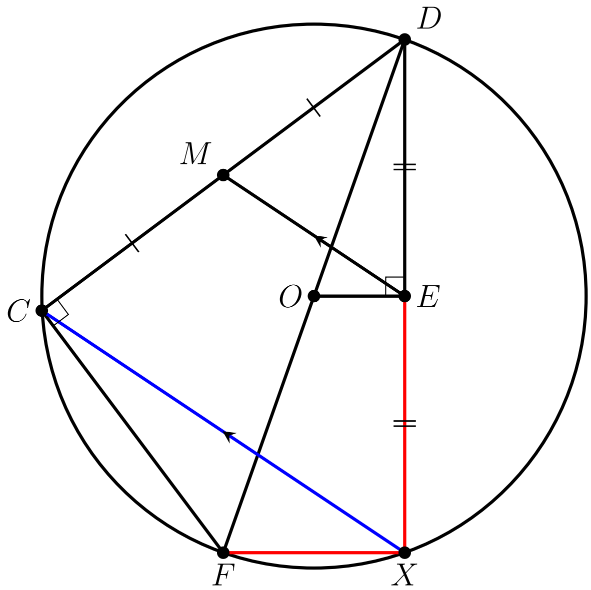
Sehingga $\angle CFD = 90° - \angle FDC$. Sehingga

$$\begin{aligned}\angle OEM + \angle OFC &= \angle ODM + DFC \\ &= \angle ODM + 90° - \angle FDC \\ &= \angle ODM + 90° - \angle ODM \\ &= 90°\end{aligned}$$

■

. . . .

Solution By Gregory Edward Suryawan, Wynne Emanuela Tanisia. Tarik perpanjangan DE hingga memotong ω di titik X.



Karena OE merupakan apotema, akibatnya panjang $DE = EX$. Karena

$$\frac{DE}{DX} = \frac{DM}{DC} = \frac{1}{2}$$

Maka $\triangle DXC$ dan $\triangle DEM$ sebangun. Sehingga $\angle MED = \angle CXD$. Karena $FXDC$ segiempat talibusur, akibatnya $\angle DFC = \angle DXC$. Maka

$$\begin{aligned} \angle OEM + \angle OFC &= \angle OEM + \angle DFC \\ &= \angle OEM + \angle DXC \\ &= \angle OEM + \angle DEM \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

■

> **Komentar.** Rata-rata perolehan poin peserta pada soal ini adalah 1.02. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**. Soal ini hanya memanfaatkan hubungan dua segitiga dan sudut-sudut serta *angle chasing*.

2. Alnilam, Sugiyem, dan Pico sedang bermain dengan menggunakan dua dadu yang berbeda (seperti dadu biasanya dengan enam sisi). Pada masing-masing dadu, pada sisinya bertuliskan angka 1 sampai 6. Mereka akan bertanding satu sama lain (satu lawan satu). Lalu, dibuat peraturan permainan sebagai berikut.
   (a). Masing-masing babak permainan dilakukan dengan melempar kedua dadu bersama-sama sebanyak satu kali.
   (b). Alnilam dikatakan menang jika jumlah bilangan yang muncul pada sisi atas dadu habis dibagi 4.
   (c). Sugiyem dikatakan menang jika jumlah bilangan yang muncul pada sisi atas dadu habis dibagi 3.

(d). Pico dikatakan menang jika jumlah bilangan yang muncul pada sisi atas dadu habis dibagi 5.

(e). Keduanya dikatakan seri jika kedua pemain memenangkan permainan seperti pada syarat (b), (c), atau (d). Sebagai contoh, jika Alnilam dengan Sugiyem bermain dan jumlah mata dadu yang muncul adalah 12, maka Alnilam dan Sugiyem seri.

(f). Jika pemain B kalah ketika melawan pemain A, maka pemain B digantikan oleh pemain C dan pemain A melawan pemain C pada babak selanjutnya. Jika pemain A dan pemain B seri, maka pemain A dan pemain B akan bertanding lagi pada babak selanjutnya.

Babak pertama, Alnilam bermain melawan Sugiyem. Tentukan peluang bahwa pada babak ketiga Alnilam kalah melawan Sugiyem jika pada babak-babak sebelumnya Alnilam tidak pernah kalah.

Jawab: $\boxed{\dfrac{\mathbf{803}}{\mathbf{46656}}}$

Misalkan x_1 dan x_2 merupakan jumlah mata dadu yang muncul.

Pada babak pertama dan babak ketiga, Alnilam tetap melawan Sugiyem. Sehingga kita bagi menjadi dua kasus.

Kasus 1 : Alnilam menang pada babak pertama

Pada babak pertama, Alnilam menang ketika melawan Sugiyem. Maka jumlah mata dadu yang muncul haruslah 4 atau 8.

- Jika $x_1 + x_2 = 4$, maka $(x_1, x_2) = (1,3), (2,2), (3,1)$ yang berarti ada 3 kemunginan.
- Jika $x_1 + x_2 = 8$, maka $(x_1, x_2) = (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$ yang berarti ada 5 kemungkinan.

Total kemungkinan adalah $3 + 5 = 8$.

Sehingga peluang Alnilam menang pada babak pertama adalah $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

Pada babak kedua, Alnilam harus menang ketika melawan Pico agar dapat melawan Sugiyem pada babak ketiga. Maka mata dadu yang muncul haruslah 4, 8, atau 12.

- Jika $x_1 + x_2 = 4$, maka $(x_1, x_2) = (1,3), (2,2), (3,1)$ yang berarti ada 3 kemunginan.
- Jika $x_1 + x_2 = 8$, maka $(x_1, x_2) = (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$ yang berarti ada 5 kemungkinan.
- Jika $x_1 + x_2 = 12$, maka $(x_1, x_2) = (6,6)$ yang berarti ada 1 kemungkinan.

Sehingga total ada $3 + 5 + 1 = 9$ kemungkinan. Maka peluangnya $\dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

Pada babak ketiga, Alnilam kalah melawan Sugiyem. Maka jumlah mata dadu yang muncul haruslah $3, 6$, atau 9.

- Jika $x_1 + x_2 = 3$, maka $(x_1, x_2) = (1,2), (2,1)$ yang berarti ada 2 kemungkinan.
- Jika $x_1 + x_2 = 6$, maka $(x_1, x_2) = (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$ yang berarti ada 5 kemungkinan.
- Jika $x_1 + x_2 = 9$, maka $(x_1, x_2) = (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)$ yang berarti ada 4 kemungkinan.

Total kemungkinan adalah $2 + 4 + 5 = 11$ kemungkinan. Maka peluang pada babak ini adalah $\frac{11}{36}$.

Demikian peluang seluruhnya pada kasus ini adalah

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{648}$$

Kasus 2 : Alnilam seri pada babak pertama

Pada babak pertama, Alnilam seri melawan Sugiyem. Maka jumlah mata dadu haruslah 12 yang berarti ada 1 kemungkinan pasangan $(x_1, x_2) = (6, 6)$. Sehingga peluangnya adalah $\frac{1}{36}$.

Pada babak kedua, Alnilam harus seri melawan Sugiyem agar dapat melawan Sugiyem pada babak ketiga. Maka jumlah mata dadu haruslah 12 yang berarti ada 1 kemungkinan pasangan $(x_1, x_2) = (6, 6)$. Sehingga peluangnya adalah $\frac{1}{36}$.

Pada babak ketiga, Alnilam kalah melawan Sugiyem. Mak jumlaha mata dadu yang muncul haruslah $3, 6$, atau 9. Dengan cara yang sama, akan diperoleh 11 kemungkinan. Sehingga peluangnya adalah $\frac{11}{36}$.

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{46656}$$

Dari kedua kasus tersebut, maka peluang total seluruhnya adalah

$$\frac{11}{648} + \frac{11}{46656} = \frac{11 \cdot 72 + 11}{46656} = \boxed{\frac{803}{46656}}$$

> **Komentar.** Rata-rata perolehan poin peserta pada soal ini adalah 0.83. Sehingga tingkat kesulitan soal ini dikategorikan **sedang**. Salah satu kesalahan peserta tidak membagi kasus kemungkinan pertandingan yang terjadi, yaitu Alnilam dapat menang dari Sugiyem atau keduanya seri pada babak pertama. Selain itu, kesalahan yang dilakukan, ketika $x_1 + x_2 = 8$ yang berarti ada 7 solusi sehingga peluangnya $\frac{7}{36}$. Hal ini tidak dibenarkan karena pasangan $(1, 7)$ dan $(7, 1)$ tidak memenuhi. Karena dua dadu tersebut berbeda, maka semestanya adalah 36.

3. Diberikan p, q, dan r adalah tiga bilangan prima yang berbeda dan $n = p \times q \times r$. Wildan menuliskan semua pecahan $\frac{a}{b}$ pada papan tulis dimana $a \times b = n^n$ dan $FPB(a, b) = 1$. Misalkan S merupakan jumlah semua pecahan $\frac{a}{b}$ pada papan tulis. Buktikan bahwa

$$S = \left(p^n + \frac{1}{p^n}\right)\left(q^n + \frac{1}{q^n}\right)\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)$$

Bukti.

Tuliskan $n = p^n \times q^n \times r^n$. Misalkan $x = p^n, y = q^n$, dan $z = r^n$. Agar $FPB(a, b) = 1$, maka haruslah

$$(a, b) = (1, xyz), (xyz, 1), (x, yz), (yz, x), (y, xz), (xz, y), (z, xy), (xy, z)$$

Kita peroleh bahwa

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{xyz} + \frac{xyz}{1} + \frac{x}{yz} + \frac{yz}{x} + \frac{y}{xz} + \frac{xz}{y} + \frac{z}{xy} + \frac{xy}{z} \\
&= \frac{1 + (xyz)^2 + x^2 + (yz)^2 + y^2 + (xz)^2 + z^2 + (xy)^2}{xyz} \\
&= \frac{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}{xyz} \\
&= \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
&= \left(p^n + \frac{1}{p^n}\right)\left(q^n + \frac{1}{q^n}\right)\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)
\end{aligned}$$

■

> **Komentar.** Rata-rata perolehan poin peserta pada soal ini adalah 1.08. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Soal ini merupakan soal termudah pada bagian uraian.

4. Diberikan x, y, z dimana masing-masing dari

$$x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2, \quad x^3 + y^3 + z^3$$

bilangan bulat. Jika

$$x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

Buktikan bahwa $x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$ bilangan bulat.

Bukti.

Misalkan

$$x + y + z = z^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = n$$

dimana n bilangan bulat. Kuadratkan bentuk $x + y + z$.

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \\
n^2 &= n + 2(xy + yz + xz) \\
xy + yz + xz &= \frac{n^2 - n}{2} \\
xy + yz + xz &= \frac{(n-1)n}{2}
\end{aligned}$$

Tinjau bentuk $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz\right)$.

$$\begin{aligned}
n - 3xyz &= n\left(n - \frac{n^2 - n}{2}\right) \\
3xyz &= n - \left(n^2 - \frac{n^3 - n^2}{2}\right) \\
3xyz &= n - n^2 + \frac{n^3 - n^2}{2} \\
3xyz &= \frac{2n - 2n^2 + n^3 - n^2}{2} \\
3xyz &= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{2}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$xyz = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$$

Misalkan $A_i = x^i + y^i + z^i$. Untuk setiap bilangan bulat $i \geq 4$, berlaku

$$A_i = (x+y+z)A_{i-1} - (xy+yz+xz)A_{i-2} + xyzA_{i-3}$$

Dari soal, kita peroleh bahwa

$$A_i = nA_{i-1} - \frac{(n-1)n}{2}A_{i-2} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}A_{i-3}$$

Klaim 3.0.1 — A_i merupakan bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat $i \geq 4$.

Bukti. Kita akan buktikan dengan induksi. Untuk $i = 4$, maka

$$A_4 = nA_3 - \frac{(n-1)n}{2}A_2 + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}A_1$$

Kita tahu bahwa $A_1 = A_2 = A_3 = n$ bilangan bulat. Tinjau bahwa $(n-1)n$ merupakan perkalian dua bilangan bulat berurutan. Maka $(n-1)n$ habis dibagi $2! = 2$. Artinya, $\frac{(n-1)n}{2}$ bilangan bulat. Perhatikan bahwa $(n-2)(n-1)n$ merupakan perkalian tiga bilangan bulat berurutan. Maka $(n-2)(n-1)n$ habis dibagi $3! = 6$. Artinya, $\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ merupakan bilangan bulat. Dapat disimpulkan bahwa

$$A_4 = nA_3 - \frac{(n-1)n}{2}A_2 + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}A_1$$

merupakan bilangan bulat. Maka untuk $i = 4$ benar. Asumsikan A_i bulat untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, k$. Untuk $i = k+1$, maka

$$A_{k+1} = nA_k + \frac{n(n-1)}{2}A_{k-1} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}A_{k-2}$$

Karena A_k, A_{k-1}, dan A_{k-2} bilangan bulat, maka

$$A_{k+1} = nA_k + \frac{n(n-1)}{2}A_{k-1} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}A_{k-2}$$

bilangan bulat. Berarti untuk $i = k+1$ juga benar. Menurut induksi, terbukti bahwa A_i merupakan bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat $i \geq 4$. □

Sehingga untuk $i = 2020$, A_{2020} juga bilangan bulat. Artinya, $x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$ merupakan bilangan bulat. ■

. . . .

Solution By Anak Agung Gde Krisna Kesumawijaya. Misalkan

$$x + y + z = z^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = n$$

dimana n bilangan bulat. Kuadratkan bentuk $x + y + z$.

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+xz) \\
n^2 &= n + 2(xy+yz+xz) \\
xy+yz+xz &= \frac{n^2-n}{2} \\
xy+yz+xz &= \frac{(n-1)n}{2}
\end{aligned}$$

Tinjau bentuk $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right)$.

$$\begin{aligned}
n-3xyz &= n\left(n-\frac{n^2-n}{2}\right)\\
3xyz &= n-\left(n^2-\frac{n^3-n^2}{2}\right)\\
3xyz &= n-n^2+\frac{n^3-n^2}{2}\\
3xyz &= \frac{2n-2n^2+n^3-n^2}{2}\\
3xyz &= \frac{n^3-3n^2+2n}{2}\\
xyz &= \frac{(n-2)(n-1)n}{6}
\end{aligned}$$

Misalkan x,y,z merupakan akar-akar dari persamaan kubik (dari teorema vietta):

$$\begin{aligned}
k^3-(x+y+z)k^2+(xy+yz+xz)k-xyz &= 0\\
k^3-nk^2+\frac{(n-1)n}{2}k-\frac{(n-2)(n-1)n}{6} &= 0
\end{aligned}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan k,

$$\begin{aligned}
0 &= k^4-nk^3+\frac{(n-1)n}{2}k^2-\frac{(n-2)(n-1)n}{6}k\\
k^4 &= nk^3-\frac{(n-1)n}{2}k^2+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}k \qquad (*)
\end{aligned}$$

Karena x,y,z merupakan akar-akar dari persamaan tersebut, maka

$$\begin{aligned}
x^4 &= nx^3-\frac{(n-1)n}{2}x^2+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}x\\
y^4 &= ny^3-\frac{(n-1)n}{2}y^2+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}y\\
z^4 &= nz^3-\frac{(n-1)n}{2}z^2+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}z
\end{aligned}$$

Dengan menjumlahkannya, diperoleh

$$x^4+y^4+z^4=\left(x^3+y^3+z^3\right)n-\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{n(n-1)}{2}+(x+y+z)\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$$

Karena $x^3+y^3+z^3=n$ bilangan bulat, maka

$$\left(x^3+y^3+z^3\right)n$$

bilangan bulat. Tinjau bahwa $n(n-1)$ merupakan perkalian dua bilangan bulat berurutan. Maka $n(n-1)$ habis dibagi $2!=2$. Artinya, $\frac{n(n-1)}{2}$ bilangan bulat. Karena $x^2+y^2+z^2=n$ bilangan bulat, maka

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{n(n-1)}{2}$$

juga bilangan bulat. Tinjau bahwa $(n-2)(n-1)n$ merupakan perkalian tiga bilangan bulat berurutan. Artinya, $(n-2)(n-1)n$ habis dibagi $3!=6$. Maka $\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ bilangan bulat. Karena $x+y+z=n$ bilangan bulat, maka

$$(x+y+z)\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$$

juga bilangan bulat. Dapat disimpulkan bahwa $x^4 + y^4 + z^4$ juga bilangan bulat. Kalikan persamaan $(*)$ dengan k berulang kali, dengan cara yang sama akan diperoleh

$$x^5 + y^5 + z^5, \ x^6 + y^6 + z^6, \ x^7 + y^7 + z^7, \ \cdots, \ x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$$

juga bilangan bulat. Terbukti bahwa $x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$ bilangan bulat. ■

Komentar. Rata-rata perolehaan poin peserta pada soal ini adalah 0.16. Soal ini merupakan soal tersulit pada bagian uraian. Salah satu hal yang berguna, jika $A_n = x^n + y^n + z^n$, maka

$$A_n = (x + y + z)A_{n-1} - (xy + yz + xz)A_{n-2} + xyzA_{n-3}$$

dengan bilangan asli $n > 3$.